DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Dans tout le problème, p désigne un nombre réel donné, >1 ; pour $x \in \mathbf{R}$, on pose :

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x>0 \\ -1 & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \end{cases}.$$

I

1° On considère la fonction y de $x \in \mathbf{R}$ définie par :

$$y = |x|^p \ ;$$

montrer que, $\forall\, x \in \mathbf{R}$, y admet une dérivée dont on donnera une expression.

Discuter l'existence de la dérivée seconde de y.

2° Soit $a \in \mathbf{R}$ fixé quelconque; on considère la fonction z de $x \in \mathbf{R}$ définie par :

$$z = |\, a+x\,|^p - |a|^p - p\,\sigma(a)|a|^{p-1}x\,.$$

Quelle est la signification géométrique de la fonction z, par rapport à la courbe représentant graphiquement les variations de la fonction y?

Montrer que $\forall\, x \in \mathbf{R}$, z est $\geqslant 0$, et que $z=0$ si et seulement si $x=0$.

3° Soient : q un nombre réel >0; x , y , x' , y' quatre nombres réels tels que :

$$x \neq 0 \quad , \quad y \neq 0,$$

et

$$\frac{\sigma(x')}{\sigma(x)} \left|\frac{x'}{x}\right|^q = \frac{\sigma(y')}{\sigma(y)} \left|\frac{y'}{y}\right|^q .$$

Montrer que :

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}.$$

1° Dans le plan rapporté à un repère orthonormé Oxy, on considère la courbe C_p d'équation :

$$|x|^p + |y|^p = 1 \ .$$

Étudier les symétries de C_p ; construire C_p.

Soit θ un angle, avec : $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$; on appelle $\Delta(\theta)$ la demi-droite issue de 0 qui fait l'angle θ avec Ox; et $M_p(\theta)$ le point d'intersection de C_p avec $\Delta(\theta)$; déterminer, en fonction de θ, les coordonnées de $M_p(\theta)$, en particulier celles (x_p, y_p) de $M_p\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Montrer que les limites :

$$M_1(\theta) = \lim_{p \to 1} M_p(\theta) \quad , \quad M_{+\infty}(\theta) = \lim_{p \to +\infty} M_p(\theta)$$

existent, et les déterminer. Lieux géométriques de $M_1(\theta)$ et de $M_{+\infty}(\theta)$ respectivement, lorsque θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

2° On appelle A l'aire délimitée par C_p, et B l'intégrale :

$$B = \int_0^{x_p} (1-x^p)^{1/p}\, dx \ .$$

Quelle relation y a-t-il entre A et B?

3° Pour $u \in [\,0\,,1\,[$, la fonction $g(.)$ de u, définie par :

$$g(u) = (1-u)^{1/p},$$

admet un développement en série entière de puissances de u, que l'on écrira :

$$(1-u)^{1/p} = 1 - \sum_{n \geqslant 1} \lambda_n(p)\, u^n \ ;$$

donner une expression de $\lambda_n(p)$; montrer que, pour tout n entier $\geqslant 1$, on a :

$$0 < \lambda_n(p) \leqslant \frac{1}{pn}.$$

Pour $m \geqslant 1$, on pose :

$$g_m(u) = 1 - \sum_{n=1}^{m} \lambda_n(p) u^n \quad , \quad r_m(u) = \sum_{n>m} \lambda_n(p) u^n \quad ;$$

montrer que pour $u \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a :

$$0 < r_m(u) < \frac{1}{p(m+1)2^m} .$$

4° On pose, pour m entier $\geqslant 1$,

$$B_m = \int_0^{x_p} g_m(x^p)\, dx \quad ;$$

montrer que :

$$0 < B_m - B < \frac{1}{p(m+1)} \frac{1}{2^{m+1/p}} .$$

Donner une expression de B_m.

Dans le cas particulier où $p = 4$, et en utilisant la valeur $m = 3$, déduire de ce qui précède que : $0{,}964 < 2^{1/4} B < 0{,}973$.

III

1° x, y, z étant 3 variables réelles, on considère l'application $\Phi(.)$ qui, à $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, fait correspondre dans $\mathbf{R}$ le nombre :

$$\Phi(x, y, z) = |x|^p + |y|^p + |z|^p \quad ;$$

montrer que, quelles que soient les valeurs de x, y, z, $\Phi(.)$ est différentiable en (x, y, z).

2° L'espace est rapporté à un repère orthonormé $Oxyz$, et on interprète désormais x, y, z comme les 3 coordonnées d'un point $P = (x, y, z)$ de l'espace; on pose $\Phi(P) = \Phi(x, y, z)$; N étant une constante > 0 quelconque, on désigne par S (N) la surface lieu des points P tels que : $\Phi(P) = N^p$. Soit $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un point donné quelconque de S (N) ; déterminer le plan tangent à S(N) en P_0.

3° Soit $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ un point fixé quelconque de l'espace; on pose : $x = \alpha + a$, $y = \beta + b$, $z = \gamma + c$; et on appelle Σ la surface, lieu de $P = (x, y, z)$ lorsque a, b, c varient de telle sorte que :

$$|a|^p + |b|^p + |c|^p = L^p ,$$

où L est une constante > 0.

Soit $P_0 = (x_0, y_0, z_0) = (\alpha + a_0, \beta + b_0, \gamma + c_0)$ un point particulier quelconque de Σ, correspondant aux valeurs a_0, b_0, c_0 de a, b, c ; on pose :

$$N_0^p = |x_0|^p + |y_0|^p + |z_0|^p = \Phi(P_0) \quad (N_0 \geqslant 0) .$$

Soient Π_1, Π_2 les plans tangents en P_0, respectivement à Σ et à S (N_0); montrer que si Π_1 et Π_2 ne sont pas confondus, il existe des points $P = (x, y, z)$ sur Σ, pour lesquels $\Phi(P) > \Phi(P_0)$.

[On pourra chercher de tels points P *voisins* de P_0, et utiliser la différentiabilité de l'application $\Phi(.)$].

Pour quels $P_0 \in \Sigma$, Π_1 et Π_2 sont-ils confondus? (on peut utiliser I. 3°).

Pour quel $P_0 \in \Sigma$, $\Phi(P_0)$ atteint-elle sa valeur maximum?

En déduire que, quels que soient (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) on a :

$$\Phi(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)^{1/p} \leqslant \Phi(x_1, y_1, z_1)^{1/p} + \Phi(x_2, y_2, z_2)^{1/p} .$$

On pose :

$$x = (1 - \rho) x_1 + \rho x_2 ,$$
$$y = (1 - \rho) y_1 + \rho y_2 ,$$
$$z = (1 - \rho) z_1 + \rho z_2$$

avec : $\rho \in [0, 1]$; montrer que : $\forall \rho \in [0, 1]$,

$$\Phi(x, y, z)^{1/p} \leqslant (1-\rho)\, \Phi(x_1, y_1, z_1)^{1/p} + \rho\, \Phi(x_2, y_2, z_2)^{1/p} .$$

4° Soit $\Omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ un point de S (1); et a, b, c trois nombres réels tels que le vecteur (a, b, c) n'est pas nul et est parallèle au plan tangent Π à S (1) en Ω. On pose : $x = \alpha + \rho a$, $y = \beta + \rho b$, $z = \gamma + \rho c$, où $\rho \in \mathbf{R}$; montrer que $\forall \rho \in \mathbf{R}$, $\Phi(x, y, z) \geqslant \Phi(\alpha, \beta, \gamma) = 1$, et que $\Phi(x, y, z) = \Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ si et seulement si $\rho = 0$.

En déduire qu'aucun segment de droite (non réduit à 1 point) ne peut appartenir à S (1).

IV

A chaque élément $\omega = (x, y, z)$ de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^3$, on associe le nombre $\| \omega \| = \Phi(x, y, z)^{1/p}$; vérifier que $\| \omega \|$ est une norme.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail